

# Route vers la synchronisation dans les réseaux d'applications chaotiques couplées

B. Fernandez<sup>1</sup>, P. Guiraud<sup>2</sup>, & R. Coutinho<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Physique Théorique, CNRS Luminy Case 907, 13288 Marseille CEDEX 09

<sup>2</sup> Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática, Blanco Encalada 2120, 5 piso, Santiago, Chile

<sup>3</sup> Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais 1096, Lisboa Codex Portugal

Bastien.Fernandez@cpt.univ-mrs.fr, pguiraud@dim.uchile.cl, Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt

**Résumé** Que la diversité d'orbites baisse quand on augmente l'intensité du couplage diffusif dans un système d'unités couplées (CML) est un phénomène intuitivement clair. D'un point de vue mathématique rigoureux, la réponse est bien moins évidente. Cet article rassemble les résultats d'analyses de la dynamique symbolique d'un système de 2 applications chaotiques couplées en insistant sur la dépendance dans le paramètre de couplage.

## 1 Introduction

Les systèmes d'applications couplées (ou leurs analogues à temps continu : les équations différentielles couplées) constituent une branche importante des systèmes dynamiques vus comme des modèles de systèmes concrets en évolution. En effet, nombreux sont les systèmes nonlinéaires que l'on peut représenter comme une assemblée d'unités soumises à la compétition entre dynamique individuelle et interaction collective (couplage) : chaînes de particules couplées par des ressorts en physique, équations de réaction-diffusion en chimie, dynamique de populations ou réseaux de régulation en biologie.

Pour les systèmes où l'interaction entre les unités est donnée par un couplage diffusif (qui tend à homogénéiser les configurations), décrire les changements de la dynamique lorsque l'intensité du couplage change constitue un problème fondamental (pour plus de détails voir le chapitre de Bunimovich dans [1]).

Afin d'examiner ce problème, considérons des exemples classiques de systèmes couplés : les réseaux d'applications couplées (Coupled Map Lattices, CML). Les CML sont des systèmes dynamiques à temps discret faisant évoluer des suites réelles  $\{x_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$  (les **configurations**). Les itérations sont définies par la relation suivante

$$x_s^{t+1} = f(x_s^t) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_{s-1}^t) - 2f(x_s^t) + f(x_{s+1}^t)), \quad s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Dans cette expression,  $f$  est donc une application réelle et le **paramètre de couplage**  $\epsilon$  est compris entre 0 et 1. Pour les origines et les motivations de ce modèle, voir le chapitre de Just et Schmüser dans [1].

En outre, nous examinerons les changements de la dynamique uniquement pour des CML avec application individuelle  $f$  chaotique (typiquement,  $f$  est supposée d'entropie topologique [3,10] positive). Ces modèles sont inspirés de systèmes d'unités chaotiques diffusivement couplées (spins sur réseaux, dynamique de populations chaotiques). Probablement trop simplistes pour être représentatifs de phénomènes concrets, ces modèles n'en

portent pas moins les caractéristiques essentielles. De plus, leur (relative) simplicité permet des analyses poussées rigoureuses du point de vue mathématique. Ils constituent donc des supports intéressants pour développer la théorie des systèmes dynamiques couplés.

Traditionnellement, l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques a pour objectif majeur de décrire les propriétés statistiques et notamment la première d'entre-elles : la mesure invariante naturelle (la distribution stationnaire qui résulte de l'évolution asymptotique de la distribution uniforme) [9]. Décrire la mesure invariante naturelle d'un CML chaotique est un problème qui a suscité beaucoup d'intérêt (et de publications!) dans la communauté. Une raison est la perspective de la description de transition de phase pour un Hamiltonien d'un système de mécanique statistique déduit d'un système dynamique sur réseau (et non pas ad hoc).

Cependant, les difficultés mathématiques sont telles qu'on ne sait décrire cette mesure que dans le cas de petites perturbations de systèmes découplés ( $\epsilon$  très petit). De plus il a fallu plus d'une vingtaine d'années et de nombreuses tentatives pour arriver à maîtriser ce cas de manière satisfaisante. (Pour un panorama des résultats sur des perturbations de CML découplés, au delà du seul problème des mesures invariantes, voir encore [1]).

Outre les difficultés dues à la dimension infinie de l'espace de phase, les difficultés majeures résident dans la caractérisation de l'**ensemble maximal invariant** (l'ensemble qui regroupe les orbites asymptotiques - répulseur ou ensemble hyperbolique dans les situations considérées). Cet ensemble étant le support de la mesure, sa détermination est un préalable obligatoire à la caractérisation de celle-ci.

Le couplage du CML a tendance à rapprocher les orbites vers la diagonale (l'ensemble des configurations constantes  $x_s = x$  pour tout  $s$ ). On s'attend donc à ce que l'ensemble maximal invariant subisse des modifications importantes (changements de sa topologie) lorsque le paramètre de couplage varie.

Un outil pratique pour étudier les ensembles invariants de systèmes dynamiques est la **dynamique symbolique**. La dynamique symbolique repose d'abord sur un **codage** : étant donné un découpage de l'espace de phase en régions bien choisies et un symbole associé à chaque région, le code d'un point est la suite de symboles obtenue en relevant les symboles des itérés successifs ( $\theta^t$  est le symbole de la région qui contient  $x^t$ ). L'intérêt de la dynamique symbolique est la propriété réciproque : étant donnée une suite symbolique, existe-t-il un point dont le code est cette suite? En d'autres termes, quelles sont les suites admissibles, c'est-à-dire les suites qui codent des points de l'espace de phase (de l'ensemble invariant maximal)?

C'est précisément la question que nous avons étudiée pour des CML chaotiques. Nous avons considéré les CML les plus simples pour lesquels on peut établir une dynamique symbolique pour toutes les valeurs de  $\epsilon$ . Ce sont des réseaux à 2 sites avec application individuelle affine par morceaux (les résultats s'étendent avec quelques précautions au cas d'applications monotones par morceaux). Pour ces exemples, nous avons étudié la dynamique symbolique et particulièrement ses changements avec  $\epsilon$ . Nos résultats consistent essentiellement en des bornes, décroissantes avec  $\epsilon$ , sur l'ensemble des suites admissibles et une caractérisation exacte dans les régimes de faible couplage et fort couplage. Ce travail peut-être vu comme complémentaire des travaux dans des régions limités du paramètre

de couplage (analyse de la mesure invariante mentionnée plus haut, analyse des régimes de synchronisation au fort couplage [5]), dont le but est une description raisonnable de la manière dont la dynamique devient de moins en moins riche et de plus en plus synchronisée quand  $\epsilon$  augmente.

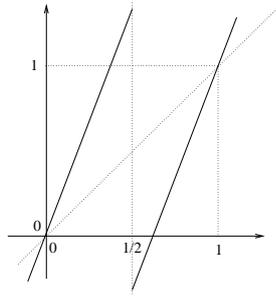
## 2 Le système dynamique et sa dynamique symbolique

### 2.1 Le CML à 2 sites et application individuelle affine par morceaux

L'exemple le plus simple de CML chaotique est celui d'un réseau à 2 sites avec application individuelle affine par morceaux. C'est un système à temps discret du plan  $(x_0^t, x_1^t) \mapsto (x_0^{t+1}, x_1^{t+1})$  dont la dynamique est définie par

$$\begin{cases} x_0^{t+1} = (1 - \epsilon)f_a(x_0^t) + \epsilon f_a(x_1^t) \\ x_1^{t+1} = (1 - \epsilon)f_a(x_1^t) + \epsilon f_a(x_0^t) \end{cases} \quad \text{où} \quad f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 1/2 \\ ax + 1 - a & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases} \quad (2)$$

L'application  $f_a$  (voir Figure 1) est inspirée d'une section de Poincaré de l'attracteur de



**Fig.1.** L'application de Lorenz  $f_a$  pour  $a > 2$ .

Lorenz [6,8].

Pour des raisons de symétrie, on restreint le paramètre de couplage  $\epsilon$  à l'intervalle  $[0, 1/2]$ . Pour simplifier, on supposera aussi que  $a > 2$ . Le cas  $a = 2$  a été analysé dans [7]. Le choix  $a = 2$  est spécial parce que valeur en deçà de laquelle la dynamique symbolique de  $f_a$  change, mais aussi parce que ce choix est crucial pour une certaine démonstration (la démonstration que, dans le domaine hyperbolique, la diagonale attire un ensemble de mesure totale).

**Analyse de la dynamique individuelle.** Pour  $a > 2$ , l'ensemble des points  $x \in [0, 1]$  dont aucun itéré  $f^t(x)$  ne sort de cet intervalle (le répulseur de la dynamique individuelle) est un ensemble de Cantor, soit  $K$ . C'est l'ensemble des points dont aucun itéré ne tombe dans l'intervalle central  $[1/a, 1 - 1/a]$  d'où les points sont envoyés hors de  $[0, 1]$ .

La dynamique symbolique associée est très simple. En découpant la droite réelle en 2 régions : la demi-droite  $x < 1/2$  et la demi-droite  $x \geq 1/2$ , et en associant le symbole 0 à la région  $x < 1/2$  et 1 à la région  $x \geq 1/2$ , on démontre facilement que toutes les suites

de 0 et de 1 sont admissibles (pour toute suite  $\{\theta^t\}_{t \in \mathbb{N}}$  où  $\theta^t = 0$  ou 1, il existe un seul point du répulseur dont le code est cette suite). En particulier, l'entropie topologique du système individuel vaut  $\log(2)$ .

## 2.2 La dynamique symbolique

Le codage naturel du CML repose sur une partition du plan en 4 quarts de plan suivant les positions des coordonnées  $x_0$  et  $x_1$  par rapport à  $1/2$ . Pour fixer les idées sur l'amplitude de variations de l'ensemble des suites admissibles lorsque  $\epsilon$  varie, considérons les 2 situations extrêmes de couplage :  $\epsilon = 0$  et  $\epsilon = 1/2$ .

Pour  $\epsilon = 0$ , les 2 coordonnées sont indépendantes. Le répulseur du CML est donc le produit  $K \times K$  du répulseur de  $f_a$  et n'importe quelle suite de paires de 0 et de 1 est admissible (pour toute suite  $\theta = \{(\theta_0^t, \theta_1^t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  où  $\theta_s^t = 0$  ou 1, il existe un seul point de  $K \times K$  dont le code est cette suite). L'entropie topologique vaut  $\log(4) = 2\log(2)$  : elle est maximale.

A l'autre extrémité de l'intervalle de couplage ( $\epsilon = 1/2$ ), n'importe quel point du plan est envoyé, après une itération, sur la diagonale :  $x_0^{t+1} = x_1^{t+1}$ . On dit qu'il y a **synchronisation**. Sur la diagonale, la dynamique est exactement celle de l'application individuelle (cette propriété est valable quel que soit  $\epsilon$ ). Il résulte que, pour  $\epsilon = 1/2$ , les suites admissibles du CML sont toutes les suites dont les symboles de chaque paire sont égaux ( $\theta_0^t = \theta_1^t$  pour  $t \geq 1$ ).<sup>1</sup> L'entropie topologique est donc égale à celle de l'application individuelle,  $\log(2)$ , elle est minimale.

Pour exposer la dynamique symbolique dans le cas d'un couplage arbitraire, il est nécessaire d'étudier le spectre de la dérivée de l'application CML (la matrice Jacobienne). En dehors des discontinuités, cette dérivée est constante et possède 2 valeurs propres. D'une part,  $a$  est valeur propre avec vecteur propre dans la direction de la diagonale. D'autre part  $b := a(1 - 2\epsilon)$  est aussi valeur propre avec vecteur propre dans la direction orthogonale à la diagonale. L'intervalle  $[0, 1/2]$  du paramètre de couplage se divise donc en 2 sous-intervalles : un domaine de faible couplage ( $b$  entre  $a$  et 1,  $\epsilon$  proche de 0) où le CML est dilatant et un domaine de fort couplage ( $b$  entre 1 et 0,  $\epsilon$  proche de  $1/2$ ) où le CML est hyperbolique (une direction dilatante et une direction contractante).

Dans le domaine dilatant, nous avons démontré [4] qu'une condition (nécessaire et suffisante) pour qu'une suite symbolique  $\theta = \{(\theta_0^t, \theta_1^t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  soit admissible est : pour tout  $t \in \mathbb{N}$  et  $s = 0, 1$ ,

$$\Psi_b(\sigma^t R^s \theta) < 0 \text{ si } \theta_s^t = 0 \quad \Psi_b(\sigma^t R^s \theta) \geq 0 \text{ si } \theta_s^t = 1 \quad (3)$$

où

$$\Psi_b(\theta) = S(\theta) + D_b(\theta) \quad \text{avec} \quad S(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} (\theta_0^k + \theta_1^k - 1) \quad \text{et} \quad D_b(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} (\theta_0^k - \theta_1^k)$$

<sup>1</sup> Le cas  $\epsilon = 1/2$  est spécial parce que l'opérateur de couplage n'étant pas inversible, pour chaque suite symbolique, il y a une infinité de points du plan dont le code est cette suite. Cependant, ceci ne pose aucun problème pour l'étude de la dynamique car tous ces points sont envoyés sur un même point du Cantor sur la diagonale.

et où le décalage  $\sigma$  et l'échange des coordonnées  $R$  sont définies par

$$\sigma(\theta) = \{(\theta_0^{k+1}, \theta_1^{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad R(\theta) = \{(\theta_1^k, \theta_0^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

La condition (3) repose sur les arguments suivants. Supposons qu'une orbite bornée du CML a pour code  $\theta$ . Alors, la résolution formelle de la récurrence (2) montre que les composantes de cette orbite s'écrivent  $x_s^t = 1/2 + \frac{a-1}{2a} \Psi_b(\sigma^t R^s \theta)$ . La condition (3) n'est autre que la condition qui impose à chaque composantes  $(x_0^t, x_1^t)$  d'être effectivement située dans la région du plan spécifiée par  $(\theta_0^t, \theta_1^t)$ . Cette méthode de codage, qui consiste à vérifier a posteriori les suites permises à partir de l'expression formelle des orbites, est différente de la méthode traditionnelle, basée sur une partition de Markov. Pour cette dernière, les suites admissibles sont une conséquence de la construction.

L'analyse du domaine dilatant consiste donc à déterminer les suites qui satisfont la condition (3). Nous avons développé des arguments similaires dans le domaine hyperbolique [2] pour démontrer que la condition d'admissibilité se déduit de la condition (3) en remplaçant  $t \in \mathbb{N}$  par  $t \in \mathbb{Z}$  et en prenant pour définition de  $D_b$ , l'expression suivante :

$$D_b(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k (\theta_1^{-k} - \theta_0^{-k})$$

En d'autres termes, dans le domaine hyperbolique, il faut aussi prendre en compte le codage passé des orbites, précaution inutile dans le régime dilatant.

### 3 Résultats

#### 3.1 Calculs et résultats numériques

La condition (3) rend pratique le calcul numérique de l'entropie topologique du CML, parce qu'elle donne immédiatement l'expression des points périodiques. En effet, le calcul est basé sur la formule de Bowen selon laquelle l'entropie topologique est donnée par le taux de croissance exponentiel du nombre de points périodiques, soit

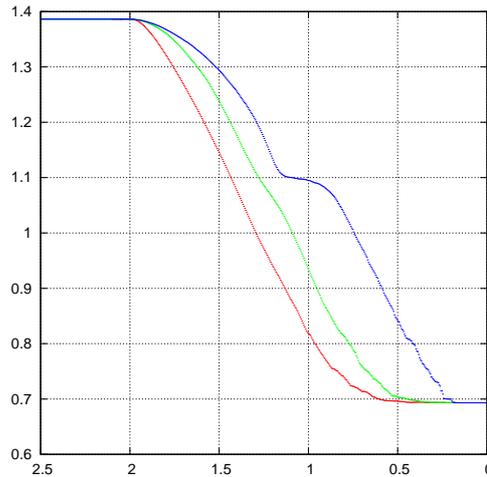
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(P_n)}{n}$$

où  $P_n$  est le nombre de points  $n$ -périodiques du CML. Faute de preuve mathématique, il n'est pas certain que la formule de Bowen soit valable dans le cas que nous considérons. Néanmoins, son application a une large classe de systèmes [3], tout comme nos résultats, nous incitent à penser que l'expression précédente est un bon indicateur de l'entropie topologique.

Calculer l'entropie topologique revient donc à calculer  $P_n$ , c'est-à-dire, essentiellement à tester quelles sont les suites  $n$ -périodiques qui satisfont la condition (3). Notons que les séries dans la définition de  $\Psi_b$  deviennent des sommes finies pour des suites périodiques. En d'autres termes, il n'y a pas d'autre erreur que la précision machine lorsqu'on évalue la condition (3) pour des suites périodiques.

Nous avons développé et optimisé un algorithme qui teste l'admissibilité des suites  $n$ -périodiques et calcule  $P_n$  [2]. Les calculs numériques basés sur cet algorithme montrent que, indépendamment de  $a$  et de  $b$ , la quantité  $\frac{\log(P_n)}{n}$  converge rapidement lorsque  $n$  augmente (la plus grande valeur de  $n$  que nous avons pu raisonnablement tester est 15 et la plus grande différence entre les valeurs pour  $n = 14$  et  $n = 15$  est de l'ordre de quelques pourcents). Nous assumerons donc que  $\frac{\log(P_{15})}{15}$  est un bon indicateur de l'entropie topologique du CML.

La figure 2 présente les résultats du calcul de cette quantité en fonction du paramètre normalisé de couplage  $b \in [0, a]$  pour 3 valeurs de  $a$ .



**Fig.2.** Entropie topologique ( $\frac{\log(P_{15})}{15}$ ) du CML en fonction du paramètre normalisé de couplage  $b$  pour 3 valeurs de  $a$  ( $a = 2.1$  courbe inférieure,  $a = 2.5$  courbe intermédiaire et  $a = 5$  courbe supérieure). L'axe horizontal est orienté selon le paramètre original de couplage  $\epsilon$ .

### 3.2 Analyse des résultats et résultats mathématiques

Le premier trait frappant de la figure 2 est le fait que l'entropie reste constante (égale à  $\log(4) \simeq 1.386$ ) sur un intervalle de faible couplage, précisément  $b$  entre  $a$  et 2. Ce résultat est bien compris mathématiquement [4]. C'est une conséquence du résultat suivant : Quelque soit  $b \in (2, a]$ , toutes les suites  $\{(\theta_0^t, \theta_1^t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  sont admissibles (le CML faiblement couplé est conjugué au CML découplé).

Dans [4], nous avons également prouvé que dès que  $b$  devient inférieur à 2, beaucoup de suites deviennent non-admissibles (des suites qui contiennent certains mots de longueur fixée et qui dépend de  $b$ ). En particulier, l'entropie topologique est inférieure à  $\log(4)$  comme la figure 2 le confirme.

La figure 2 montre en outre que sur un intervalle à l'autre extrémité du domaine de couplage, l'entropie est également constante (égale à  $\log(2) \simeq 0.693$ ). Ce plateau a également une confirmation mathématique [2] : Quelque soit  $b \in (0, \frac{a-2}{a(a-1)})$ , les seules suites admissibles sont, toutes les suites dont les symboles de chaque paire sont égaux, et la suite périodique  $\dots(0, 1), (1, 0), (0, 1), (1, 0)\dots$ . La figure 2 montre l'intervalle sur lequel l'entropie vaut  $\log(2)$  est plus grand que  $(0, \frac{a-2}{a(a-1)})$  : l'entropie vaut  $\log(2)$  tant que  $b$  est inférieur à 0.333 si  $a = 2.1$  (or  $\frac{a-2}{a(a-1)} \simeq 0.043$  dans ce cas), tant que  $b < 0.308$  si  $a = 2.5$  ( $\frac{a-2}{a(a-1)} \simeq 0.133$ ) et tant que  $b < 0.175$  si  $a = 5$  ( $\frac{a-2}{a(a-1)} \simeq 0.150$ ) : la différence entre valeur théorique et valeur numérique diminue quand  $a$  augmente.

En dehors des intervalles extrêmes, la caractéristique principale que montre la figure 2 est que l'entropie est décroissante et continue avec le paramètre de couplage  $\epsilon$ . Ceci révèle que la dynamique devient, progressivement, de moins en moins riche et de plus en plus régulière quand le couplage augmente. La figure ainsi que d'autres résultats suggèrent également que l'entropie est une fonction croissante et continue de  $a$ .

En dehors d'un voisinage de  $b = 2$  pour lequel on peut prouver cette décroissance [4], la confirmation mathématique de ces résultats reste un problème ouvert. Les meilleurs résultats que nous avons obtenus sont des bornes inférieures et supérieures pour l'entropie, des bornes qui sont des fonctions décroissantes de  $\epsilon$  : on ne sait pas démontrer que l'entropie est décroissante mais on sait montrer qu'elle est comprise entre 2 fonctions décroissantes. Les premières bornes obtenues sont des fonctions constantes par morceaux [4]. Nous les avons amélioré en des fonctions strictement décroissantes [2]. (Les figures comparant ces bornes avec les données numériques sont en cours de réalisation.)

Ces bornes sont des conséquences de bornes sur l'ensemble des suites admissibles bornes obtenues en introduisant un ordre sur les suites symboliques pour analyser (3). Dans le domaine dilatant et dans la version la plus simple [4], ces contraintes sont les suivantes : si le symbole  $(0, 1)$  (respectivement  $(1, 0)$ ) apparaît plus de  $\bar{n}(b)$  fois consécutivement, alors la suite n'est pas admissible (sauf si ces répétitions sont au début de la suite). Au contraire, si ce symbole (ou  $(1, 0)$ ) n'apparaît jamais plus de  $\underline{n}(b)$  fois consécutivement, alors la suite est admissible. (Evidemment, nous avons  $\underline{n}(b) < \bar{n}(b)$ .) Les fonctions  $b \mapsto \underline{n}(b)$  et  $b \mapsto \bar{n}(b)$  sont croissantes et constantes par morceaux.

En d'autres termes, nous avons montré que plus, le couplage est fort, moins les orbites du CML peuvent séjourner longtemps dans la (même) région hétérogène (la région où les 2 coordonnées sont de part et d'autre de la discontinuité  $1/2$ ). Seules survivent les orbites qui restent le plus souvent dans la région homogène. Ce phénomène peut être interprété comme une expression de la convergence vers un régime de synchronisation dans lequel ne sont bornées que les orbites qui ne séjournent que dans la région homogène, les orbites sur la diagonale de fait.

## 4 Conclusion

Le but de cet article était d'une part de mettre en évidence le besoin et les moyens d'une description du support des orbites bornées de CML chaotiques et, d'autre part, d'exposer les résultats numériques et mathématiques obtenus dans les cas les plus simples.

Une suite naturelle de ces travaux serait de chercher une description exacte de la dynamique symbolique (ou de l'ensemble invariant maximal) pour toute valeur du couplage. Ceci requiert certainement une profonde amélioration des techniques utilisées dans [2,4].

Enfin, et avec pour objectif de décrire des modèles plus réalistes, il faudrait également considérer des réseaux plus grands et/ou des applications individuelles plus générales (comme cela a été fait dans [4] pour des réseaux à 2 sites).

## Références

1. J-R. CHAZOTTES ET B. FERNANDEZ, ED., *Dynamics of coupled maps lattices and of related spatially extended systems*, Lecture Notes in Physics 671, Springer (2005).
2. R. COUTINHO, B. FERNANDEZ ET P. GUIRAUD, en préparation.
3. P. CVITANOVIĆ ET AL., *Chaos : Classical and Quantum*, <http://chaosbook.org/> (2003).
4. B. FERNANDEZ ET P. GUIRAUD, Route to chaotic synchronisation in coupled map lattices : rigorous results, *Discrete & Cont. Dynam. Sys. B* 4 (2004) 435-455.
5. P. GLENDINNING, Milnor attractors and topological attractors of a piecewise linear map, *Nonlinearity* 14 (2001) 239-257.
6. J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, *Nonlinear oscillators, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer (1983).
7. G. KELLER, M. KUNZLE ET T. NOWICKI, Some phase transitions in coupled map lattices, *Physica D* 59 (1992) 39-51.
8. G. KELLER ET M. SAINT-PIERRE, Topological and measurable dynamics of Lorenz maps, *Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems*, Springer (2001), 333-361.
9. A. LASOTA ET M. MACKEY, *Chaos, fractals, and noise. Stochastic aspects of dynamics, 2nd edition*, Springer (1994).
10. C. ROBINSON, *Dynamical Systems : Stability, Symbolic dynamics and chaos*, CRC Press (1999).